数理解析研究所講究録
659巻 1988年 53-59

写像のLeray スペクトル列と fiber shape

筑波大・数　矢ヶ崎　達彦 (Tatsuhiko Yagasaki)

§1　decompositions of manifolds and sheaves

manifold M の decomposition G を考えるさい，G の元 g の shape type や G の regularity 特に homotopical local triviality の情報から さらに M, G, decomposition space M/G，projection $\pi: M \to M/G$ などについて情報を得ようとするとき，代数的な道具として π の (Čech cohomology) Leray sheaf $\mathcal{L}(\pi)$ や Leray spectral sequence $E(\pi)$: $H^p(M/G, \mathcal{L}^q(\pi; \mathcal{A})) \Rightarrow H^{p+q}(M; \mathcal{A})$ を用いることができる。Bredon の "Sheaf Theory" [1] の中でも M/G の cohomological dimension, local connectedness，さらに M/G がどの様な条件の下で homology manifold になるかといったことについて主に代数的な観点から調べている。一方 decomposition theory では，きわめて幾何的な議論が中心になるわけであるが，Daverman, Dydak, Walsh et al はこの方向から再び sheaf を考察している。今回の講演では homology n manifold X の local orientability (i.e. n-th homology sheaf $\mathcal{H}_n(X)$ が locally constant) の Dydak-Walsh による elementary proof [2] を紹介した，この証明は次の2つの議論に要約された：

(1) 一般に，X が完備距離空間，X 上の presheaf S は locally finitely generated，induced sheaf $\mathcal{S}$ の各 stalk $\mathcal{S}_x$ も finitely generated で $\mathcal{S}_x \cong \mathcal{S}_y$ $(x, y \in X)$ ならば dense open set 上で $\mathcal{S}$ は locally constant である。

(2) $\mathcal{H}_n(X)$ は (1) より dense open set U 上で locally constant になる。U を極大にとっておき，$X \setminus U \neq \phi$ とすると再び (1) より $X \setminus U$ の dense open set V 上で $\mathcal{H}_n$ は locally constant になる。いま A を，1つの end は V に，残りの部分は U に含まれる arc とすると $\mathcal{H}_n|A$ が constant になることが示され，$A \subset U$ となって矛盾を得る．

[2] では，finitely generated local homology をもつ homogeneous ENR が homology manifold になるという事実の elementary proof も与えている。

筆者も decomposition への興味から Leray sheaf と fiber shape の関係を調べたことがあり ([3])，この論説では次の2つの事柄について説明する．§2 Leray spectral sequence の tautness §3 Leray spectral sequence の fiber shape invariance

§2 Tautness of Leray spectral sequences of maps

Čech type の invariant は continuity によって特徴付られる。[1] では (Čech) sheaf cohomology の tautness (paracompact support) や continuity (locally compact, compact support) が示されているが，では (Čech) Leray sheaf や, Leray spectral sequence は map に対して tautness を持つであろうか？ 次の設定を考える： $f: X \to Y$: map, $X_0 \subset X$: closed. Λ : a directed set $X_\lambda \subset X$ $(\lambda \in \Lambda)$; $X_\lambda \supset X_\mu \supset X_0$ $(\lambda \leq \mu)$, $Y_0 \subset Y$: closed $Y_\lambda \subset Y$ $(\lambda \in \Lambda)$; $Y_\lambda \supset Y_\mu \supset Y_0$ $(\lambda \leq \mu)$ $f(X_\lambda) \subset Y_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda$ or $\lambda = 0)$ $f_\lambda = f|X_\lambda : X_\lambda \to Y_\lambda$, $\mathcal{A}$: a sheaf over X, $\mathcal{A}_\lambda = \mathcal{A}|X_\lambda$ ϕ, ψ : paracompactifying families of supports on Y, X resp. $\phi_\lambda = \phi \cap Y_\lambda$, $\psi_\lambda = \psi \cap X_\lambda$. cofinality : "$X$ の任意の近傍がある X_λ を含む，$\{Y_\lambda\}$ についても同様" とする。このとき次の diagram を得る。

$$(*) \quad \begin{array}{c} \{ \mathcal{L}^q_{\psi_\lambda}(f_\lambda; \mathcal{A}_\lambda) \longrightarrow \mathcal{L}^q_{\psi_\mu}(f_\mu; \mathcal{A}_\mu) \}_{\lambda \leq \mu} \\ \searrow \quad \swarrow \\ \mathcal{L}^q_{\psi_0}(f_0, \mathcal{A}_0) \end{array}, \qquad (**) \quad \begin{array}{c} \{ E(f_\lambda) \longrightarrow E(f_\mu) \}_{\lambda \leq \mu} \\ \searrow \quad \swarrow \\ E(f_0) \end{array}$$

<u>Thm</u>. (*), (**) は共に direct limit である，すなわち $\mathcal{L}$, E は tautness を満たす.

但し，ここで direct limit の意味は：

(*) 各 $y \in Y_0$ に対して y 上の stalks の diagram $\begin{array}{c} \{ \mathcal{L}(f_\lambda)_y \to \mathcal{L}(f_\mu)_y \} \\ \searrow \quad \swarrow \\ \mathcal{L}(f_0)_y \end{array}$ が direct limit。

(**) 各 r, p, q に対して diagram

$$\begin{tikzcd} \{E_r^{p,q}(f_\lambda) \arrow[r] \arrow[dr] & E_r^{p,q}(f_\mu)\} \arrow[d] \\ & E_r^{p,q}(f_0) \end{tikzcd}$$

が direct limit. formal には,

R-module の direct system の category dir-R-mod に terms $E_r^{p,q}(\underline{f}) = \{E_r^{p,q}(f_\lambda)\}$ をもつ spectral sequence $E(\underline{f})$ を考えたとき, morphism $E(\underline{f}) \to E(f_0)$ が degree wise に direct limit ということである。

(*)は Leray sheaf の定義より容易に示される。一方(**)については, homology が direct limit を保つことに注意して E_2-term について次を示せばよい:

<u>Claim</u> diagram

$$\begin{tikzcd} \{H^p_{\Phi_\lambda}(Y_\lambda, \mathcal{L}^q_{Y_\lambda}(f_\lambda, \mathcal{A}_\lambda)) \arrow[r] \arrow[dr] & H^p_{\Phi_\mu}(Y_\mu, \mathcal{L}^q_{Y_\mu}(f_\mu, \mathcal{A}_\mu))\}_{\lambda \le \mu} \arrow[d] \\ & H^p_{\Phi_0}(Y_0, \mathcal{L}^q_{Y_0}(f_0, \mathcal{A}_0)) \end{tikzcd}$$

は direct limit.

(*)より $\{\mathcal{L}^q(f_\lambda)\} \to \mathcal{L}^q(f_0)$ は direct limit であり, compact supports case は [1] ch II §14 より示す。一般の case は次の事柄に注意する:

<u>Lemma</u> index set Λ は次の意味で "locally finite directedness" を満たす: Y の open set U に対して $\lambda \le_U \mu \Leftrightarrow f^{-1}(U) \cap X_\lambda \supset f^{-1}(U) \cap X_\mu$ と定義する。もし $\{U_\alpha\}_\alpha$ が locally finite open family of Y であれば indices $\{\lambda_\alpha\}_\alpha \subset \Lambda$ に対して $\lambda \in \Lambda$ で $\lambda_\alpha \le_{U_\alpha} \lambda$ となるものがとれる。

これより "compact, finite indices" を "paracompact, locally finite indices" におきかえて，local sections をつなぎ合わせることができる．したがって $\mathcal{L}(f_\lambda)$'s の flabby resolutions の direct limit が $\mathcal{L}(f_0)$ の flabby resolution となり，これらも locally finite directedness を満たすので，sections Γ をとっても direct limit が保たれ claim を得る。

§3 fiber shape invariance of Leray spectral sequences

fiber shape theory は fiber homotopy theory の Čech extension として定義される。以下，空間は metrizable とする．B を base space とし，$\mathcal{FH}_B$ を fiber homotopy category over B，$\mathcal{FA}_B$ を ANFR over B からなる subcategory とする。ここで map $p: E \to B$ が ANFR（又は local soft map）とは diagram

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & E \\ \cap & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow[f]{} & B \end{array}$$

，$A \subset X$: closed

が与えられたとき，A の近傍 U と map $U \to E$ で次を可換にするものが存在する：

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & E \\ \cap & \nearrow & \downarrow p \\ U & \xrightarrow[f|_U]{} & B \end{array}$$

（すなわち，partial lift が近傍に拡張する。）たとえば，ANR fiber の bundle map は ANFR であり，ANR の間の proper map に対しては，ANFR は Hurewicz fibration と一致する。さて pro $\mathcal{FH}_B$ において各 map $f: X \to B$ に対して morphism $\underline{\Phi}: f \to \underline{p}_f \in$ pro-$\mathcal{FA}_B$ が存在して，"任意の $\underline{\Psi}: f \to \underline{q} \in$ pro $\mathcal{FA}_B$ に対して $\underline{\chi}: \underline{p}_f \to \underline{q}$ で $\underline{\chi}\,\underline{\Phi} = \underline{\Psi}$ となるものが unique

に存在する。したがって fiber shape category $sh_B = sh(\mathcal{FH}_B, \mathcal{FA}_B)$ を得る: $Ob\, sh_B = Ob(\mathcal{FH}_B)$, $Mor_{sh_B}(f, g) = Mor_{\text{pro-}\mathcal{FA}_B}(\underline{F}_f, \underline{F}_g)$ である。

一般に shape invariant は homotopy invariant で continuity をもつものとして特徴付られる。Leray sheaf や Leray spectral sequence は (fiberwise) constant sheaf 係数のとき fiber homotopy invariant で §2 より tautness を満たすから, fiber shape invariant になることがわかる:

<u>Thm</u> $\mathcal{B}$ を B 上の sheaf, Φ を B 上の paracompactifying family of supports とするとき map $f: X \to B$ の Leray sheaf $\mathcal{L}^*(f; f^*\mathcal{B})$, Leray spectral sequence $E_f: H^p_\Phi(B; \mathcal{L}^q(f)) \Rightarrow H^{p+q}_{f^{-1}(\Phi)}(X; f^*\mathcal{B})$ は fiber shape invariant である。

これより自動的に fiber shape morphism に対する Vietoris-Biegle type の結果が得られる。

<u>Cor</u> $f: X \to B$, $g: Y \to B$ を closed maps, $\Phi: f \to g$ を fiber shape morphism とする。もし各 $b \in B$ に対し $\Phi^*_b: H^*(g^{-1}(b); \mathcal{B}_b) \to H^*(f^{-1}(b); \mathcal{B}_b)$ が isomorphism であれば $\Phi^*: H^*_{g^{-1}(\Phi)}(Y; g^*(\mathcal{B})) \to H^*_{f^{-1}(\Phi)}(X; f^*\mathcal{B})$ も isomorphism である.

References

[1] G. E. Bredon, Sheaf Theory, McGraw-Hill, New York

1967.

[2] J. Dydak and J. Walsh, Sheaves that are locally constant with applications to homology manifolds, Geometric Topology and Shape Theory, Lecture Notes in Math. 1283, pp. 65 ~ 87, Springer-Verlag, 1987.

[3] T. Yagasaki, Fiber shape invariance of Leray spectral sequences of maps and approximate fibrations from spheres, preprint, May 1987.